Том 29, № 146 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187
УДК 517.925.5

Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения

Надежда Алексеевна ЛОБОДА

ФГБОУ ВО «Адыгейский государственный университет»

385000, Российская Федерация, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208

Аннотация. В настоящей работе изучаются различные разновидности показателей блуждаемости решений линейной однородной и нелинейной двумерных дифференциальных систем с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами. При этом все непродолжаемые решения рассматриваемой нелинейной системы определены на всей положительной полуоси времени.

В 2010 году И. Н. Сергеевым были определены скорость блуждания и показатели блуждаемости (верхние и нижние, сильные и слабые) ненулевого решения x линейной системы. Скорость блуждания решения — это средняя по времени скорость, с которой движется центральная проекция решения на единичную сферу. А сильные и слабые показатели блуждаемости — это скорость блуждания решения, но минимизированная по всем системам координат, причем в случае слабого показателя блуждаемости минимизация производится в каждый момент времени. Следовательно, сильные и слабые показатели блуждаемости учитывают только ту информацию о решении, которая не гасится линейными преобразованиями: так, они учитывают обороты вектора x вокруг нуля, но не учитывают его локальное вращение вокруг какого-либо другого вектора.

В данной работе проведено исследование по первому приближению сильных и слабых показателей блуждаемости. Установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров (т. е. множеств различных значений на ненулевых решениях) сильных и слабых показателей блуждаемости нелинейной системы и системы ее первого приближения. А именно, построена двумерная нелинейная система, спектры сильных и слабых показателей блуждаемости сужения которой на любую открытую окрестность нуля фазовой плоскости состоят из всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$, а спектры линейной системы ее первого приближения — только из одного элемента.

Ключевые слова: линейная однородная дифференциальная система, нелинейная дифференциальная система, система первого приближения, спектр показателя системы, колеблемость решения, показатель колеблемости, показатель блуждаемости, скорость блуждания решения

Для цитирования: *Лобода Н.А.* Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 176–187. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187

Comparing the spectra of wandering exponents of a nonlinear two-dimensional system and a first approximation system

Nadezhda A. LOBODA
Adyghe State University
208, Pervomayskaya St., Maykop 385000, Republic of Adygea, Russian Federation

Abstract. In this paper, we study various varieties of wandering exponents for solutions of linear homogeneous and nonlinear two-dimensional differential systems with coefficients continuous on the positive semiaxis. Moreover, all non-extendable solutions of the nonlinear system under consideration are defined on the entire positive time semi-axis.

In 2010, I. N. Sergeev determined the wandering speed and wandering exponents (upper and lower, strong and weak) of a nonzero solution x of a linear system. The wandering speed of the solution is the time-average velocity at which the central projection of the solution moves onto the unit sphere. Strong and weak exponents of wandering are the wandering speed of the solution, but minimized over all coordinate systems, and in the case of a weak exponent of wandering, minimization is performed at each moment of time. Therefore, strong and weak exponents of wandering take into account only the information about the solution that is not is suppressed by linear transformations: for example, they take into account the revolutions of the vector x around zero, but do not take into account its local rotation around some other vector.

In this work, a first approximation study of strong and weak wandering exponents was carried out. It is established that there is no dependence between the spectra (i. e., a set of different values on non-zero solutions) of strong and weak wandering exponents of a nonlinear system and the system of its first approximation. Namely, a two-dimensional nonlinear system is constructed such that the spectra of wandering exponents of its restriction to any open neighborhood of zero on the phase plane consist of all rational numbers in the interval $[0,1]$, and the spectra of the linear system of its first approximation consist of only one element.

Keywords: linear homogeneous differential system, nonlinear differential system, first approximation system, spectrum of a system exponent, variability of solution, exponent of oscillation, exponent of wandering, the wandering speed of a solution

Mathematics Subject Classification: 34A30, 34A34, 34D05.

For citation: Loboda N.A. Comparing the spectra of wandering exponents of a nonlinear two-dimensional system and a first approximation system. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 176–187.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работах [1–6] И. Н. Сергеева вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем, отвечающие за колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений на полупрямой. В 2015 году в статье [3] (см. также [4, 5]) все введенные к тому моменту характеристики ляпуновского типа были систематизированы, что привело к изменению названий некоторых из них: полные и векторные частоты переименованы, соответственно, в сильные и слабые показатели колеблемости, показатели блуждаемости и блуждания — в сильные и слабые показатели блуждаемости, а показатели вращаемости и вращения — в сильные и слабые показатели ориентированной вращаемости. Спектры показателей колеблемости, блуждаемости и ориентированной вращаемости автономных дифференциальных систем были полностью описаны в работах [2, 7–9], а спектры этих показателей треугольных систем изучены в [11,17], существование дифференциальных систем с континуальными спектрами доказано в [10,13,16,18], возможность управления суслинскими спектрами реализована в [12], существенные значения спектров были рассмотрены в [14,15,19]. Подвижность асимптотических характеристик линейной дифференциальной системы (и уравнения) при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях изучалась в [1, 2, 15, 20, 21].

Все перечисленные показатели, как и *линейные* показатели, оказались применимыми лишь к решениям, гарантированно определенным на всей положительной полуоси времени (см. [22]). Это затрудняет их вычисление для нелинейных систем, где такой гарантии дать нельзя. В работе [22] предпринята первая попытка распространить определения этих показателей на случай несуществования решений системы на всей полуоси, а именно, определены и изучены *сферические*, *радиальные* и *шаровые* функционалы и показатели. В работе [23] проведены исследования этих показателей по первому приближению, а в [24] установлено существование нелинейной системы со счетными спектрами линейных показателей колеблемости, в то время как спектры соответствующей линейной системы ее первого приближения состоят ровно из одного неотрицательного числа. В настоящей работе последнее свойство перенесено и на линейные показатели блуждаемости.

1. Показатели блуждаемости решений дифференциальных систем

Для заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовой (векторной) фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1.1}$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = x_0, \quad x_0 \in G. \tag{1.2}$$

С системой (1.1) свяжем линейную систему ее *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_l(t,x), \quad A(t) = f'_x(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t,x) - f_l(t,x)| = o(x), \quad x \to 0.$$

Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (1.1), а через $x_f(\cdot, x_0)$ — решение задачи (1.2). Зададим множества

$$G_* \equiv \{x_0 \in G \mid x_0 \neq 0\}, \quad G_\delta \equiv \{x_0 \in G \mid |x_0| = \delta\}, \quad G_{\delta,\gamma} \equiv \{x_0 \in G \mid \delta < |x_0| < \gamma\},$$

где $\gamma > \delta \geq 0$. В дальнейшем звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль.

Сначала дадим основные определения.

О п р е д е л е н и е 1.1 (см. [1]). Для функции $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2_*)$ и числа $t > 0$ введем *вариацию следа*

$$\mathrm{P}(u,t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(u,\tau) \right| d\tau, \quad e(u,\tau) \equiv \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|},$$

функции u за время от 0 до t, причем ситуацию, когда функция u имеет на отрезке $[0;t]$ хотя бы один нуль, считаем *вырожденной* и полагаем по определению $\mathrm{P}(u,t) = +\infty$.

З а м е ч а н и е 1.1. Геометрический смысл вариации следа функции u — это полная *длина пути* на единичной окружности конца единичного вектора $e(u,\tau)$ при $\tau \in [0;t]$. Отсутствие у функции u нулей гарантирует, что вариация ее следа принимает только *конечные значения* (как интеграл $\mathrm{P}(u,t)$ от непрерывной функции на отрезке).

О п р е д е л е н и е 1.2 (см. [1,2]). *Линейные нижние слабый и сильный показатели блуждаемости* решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$, заданного на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, определим формулами

$$\check{\rho}_\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t), \quad \check{\rho}_\bullet(x) \equiv \inf_{L\in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^2} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx,t),$$

где $\mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^2$ — множество всех невырожденных линейных операторов $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Линейные верхние слабый* $\hat{\rho}_\circ(x)$ и *сильный* $\hat{\rho}_\bullet(x)$ показатели блуждаемости зададим теми же формулами, но с заменой в них нижних пределов при $t \to +\infty$ верхними.

О п р е д е л е н и е 1.3 (см. [3,4]). Для функции $x \in \mathcal{S}_*(f)$ условимся о следующем:

1) если значение верхнего (с крышечкой) показателя блуждаемости совпадает со значением нижнего (с галочкой) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки;

2) если значение слабого (с пустым кружочком) показателя блуждаемости совпадает со значением сильного (с полным кружочком) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще.

О п р е д е л е н и е 1.4. Для каждого показателя блуждаемости $\varkappa = \hat{\rho}_\bullet, \check{\rho}_\bullet, \hat{\rho}_\circ, \check{\rho}_\circ$ и подмножества $M \subset \mathbb{R}^2$ определим множество $\varkappa(f, M) \equiv \{\varkappa(f, x_0) \mid x_0 \in M\}$.

Для произвольной вектор-функции $z \in C^1(E, \mathbb{R}^2_*)$ (E — либо отрезок $[0,T]$, либо полуось $\mathbb{R}_+$) однозначно определим функцию $\phi_z : E \to \mathbb{R}$ соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|\big(\cos\phi_z(t),\, \sin\phi_z(t)\big)^\top = z(t), \quad t \in E, \quad \phi_z \in C^1(E).$$

З а м е ч а н и е 1.2. Вариацию следа функции z за время от 0 до t можно вычислять по формуле

$$\mathrm{P}(z,t) = \int_0^t \left|\dot{\phi}_z(\tau)\right| d\tau,$$

так как

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau} e(z,\tau)\right| = \left|\frac{d}{d\tau}\big(\cos\phi_z(t),\, \sin\phi_z(t)\big)^\top\right| = \left|\big(-\sin\phi_z(t),\, \cos\phi_z(t)\big)^\top \dot{\phi}_z(\tau)\right| = |\dot{\phi}_z(\tau)|.$$

2. Основной результат

Теорема 2.1. *При $G=\mathbb{R}^2$ существуют две системы, первая из которых — линейная вида (1.3) и служащая системой первого приближения для другой, удовлетворяет соотношениям $\rho(f_\prime,G_*)=\{1\}$, а вторая система вида (1.1) при любом $\epsilon>0$ — соотношениям*

$$\rho(f,G_{0,\epsilon})=\rho(f,G_*)=[0,1]\cap\mathbb{Q}. \tag{2.1}$$

Сначала сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *При $G=\mathbb{R}^2$ для некоторой линейной системы вида (1.3) со спектром показателей блуждаемости $\rho(f_\prime,G_*)=\{1\}$ при любых $q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ и $0<\alpha<\beta\le 1$ найдется возмущенная система*

$$\dot x=A(t)x+B(x,t)\equiv f(t,x),\quad |B(x,t)|\le|x|^2,\quad x\in\mathbb{R}^2,\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

обладающая свойствами

$$\rho(f,G_\alpha)=\rho(f,G_\beta)=\{1\},\quad \rho(f,G_{\alpha,\beta})=\{q\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим линейную периодическую систему (1.3), записываемую в фиксированном базисе в $\mathbb{R}^2\equiv G$ в виде

$$\dot x=\zeta(t)Ix\equiv f_\prime(t,x),\quad \zeta(t)\equiv\frac{\pi}{2}\cos t,\quad I\equiv\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Она задает вращение фазовой плоскости вокруг точки $x=0$ с мгновенной скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t\in\mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0\in G_*$ за время t равен

$$\varphi\big(t,x_{f_\prime}(\cdot,x_0)\big)=\frac{\pi}{2}\sin t\in\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big],\quad x_{f_\prime}(t_k,x_0)=(-1)^{k-1}x_{f_\prime}(t_1,x_0),\quad t_k\equiv\pi k-\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{N}.$$

На каждом промежутке $[t_k,t_{k+1})$, $k\in\mathbb{N}$, решение $x_{f_\prime}=x_{f_\prime}(t,x_0)$ совершает поворот на угол π, и это свойство не меняется под действием любого преобразования $L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$, поэтому

$$\frac{\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_{k+1})-\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_k)}{t_{k+1}-t_k}=\frac{\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_{k+1})-\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_k)}{t_{k+1}-t_k}=1,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\rho_\circ(x_{f_\prime})&=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t)=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_{k+1})\\&=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\sum_{i=1}^{k}\big(\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_{i+1})-\mathrm{P}(Lx_{f_\prime},t_i)\big)\\&=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\big(\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_{i+1})-\mathrm{P}(x_{f_\prime},t_i)\big)\\&=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}(t_{i+1}-t_i)=\lim_{k\to+\infty}\frac{t_{k+1}-t_1}{t_{k+1}}=1,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\rho_\bullet(x_{f\prime}) &= \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\mathrm{P}(Lx_{f\prime},t_{k+1})\\
&= \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2}\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\left(\mathrm{P}(Lx_{f\prime},t_{i+1})-\mathrm{P}(Lx_{f\prime},t_i)\right)\\
&= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\left(\mathrm{P}(x_{f\prime},t_{i+1})-\mathrm{P}(x_{f\prime},t_i)\right)=1.
\end{aligned}
$$

Следовательно, все показатели блуждаемости совпадают между собой, а их спектр состоит из одного элемента $\rho(f\prime,G_*)=\{1\}$.

2. На отрезке $r\in[0,1]$ для выбранных $0<\alpha<\beta\le 1$ зададим функции

$$\psi_\pm(r)\equiv 1\pm\frac{r^2(r-\alpha)^2(r-\beta)^2}{(r^2+2)^2}\in(0,2).$$

Для нелинейной периодической системы вида (1.1) с правой частью

$$g(t,x)=\psi_-(|x|)\cdot f\prime(t,x),\quad t\in\mathbb{R}_+$$

при любом $t\in\mathbb{R}_+$ имеем

$$\varphi(t,x_g(\cdot,x_0))=\psi_-(|x_0|)\frac{\pi}{2}\sin t\in\left[-\psi_-(|x_0|)\frac{\pi}{2},\psi_-(|x_0|)\frac{\pi}{2}\right]\subset\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\quad \alpha<|x_0|<\beta.$$

В силу последнего включения для любого x_0, удовлетворяющего условию $\alpha<|x_0|<\beta$, решение $x_g=x_g(t,x_0)$ не покидает сектор, центральный угол которого меньше чем π, причем зазор между этим сектором и целым полукругом равен $\delta=\pi-\psi_-(|x_0|)\pi$.

Убедимся в том, что можно указать такой поворот $L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$, что вектор Lx_g лежит на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ строго в одной полуплоскости относительно заданной прямой $l\subset\mathbb{R}^2$. Более того, если оператор L задавать как композицию указанного поворота и неограниченного удлинения вектора $e\perp l$, то при любом $t>1$ можно делать сколь угодно малым величину $t^{-1}\mathrm{P}(Lx_g,t)$. Положим

$$L_n=S_nR,\quad n\in\mathbb{N},\quad \left(\overline{x}_g(t),\overline{y}_g(t)\right)^\top=Rx_g,\quad \left(\tilde{x}_g(t),\tilde{y}_g(t)\right)^\top=L_nx_g,$$

где

$$S_n=\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}\cos\psi&\sin\psi\\-\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix},\quad \psi=\phi_{x_g}(0)-\delta/2.$$

Покажем, что искомым оператором является композиция L_n при достаточно больших n поворота R по часовой стрелке на угол ψ и растяжения S_n вдоль вертикальной оси. В самом деле, имеем

$$
\begin{gathered}
\phi_{\overline{x}_g}(0)=\phi_{x_g}(0)-\psi=\delta/2,\\
\phi_{\overline{x}_g}(\pi/2)=\phi_{x_g}(\pi/2)-\phi_{x_g}(0)+\delta/2=\psi_-(|x_0|)\pi/2+\delta/2=\pi/2,\\
\phi_{\overline{x}_g}(3\pi/2)=\phi_{x_g}(3\pi/2)-\phi_{x_g}(0)+\delta/2=-\psi_-(|x_0|)\pi/2+\delta/2=\delta-\pi/2,\\
\phi_{\tilde{x}_g}(0)\in(0,\pi/2),\quad \phi_{\tilde{x}_g}(\pi/2)\in(0,\pi/2),\quad \phi_{\tilde{x}_g}(3\pi/2)\in(-\pi/2,0).
\end{gathered}
$$

Из нестрогого убывания функции ϕ_{x_g} на отрезке $[\pi/2,3\pi/2]$ и геометрических свойств операторов R и S_n следуют соотношения

$$\dot{\phi}_{\tilde{x}_g}(t)\le 0,\quad t\in[\pi/2,3\pi/2],$$

$$\phi_{\tilde{x}_g}(\pi/2+t)=\phi_{\tilde{x}_g}(\pi/2-t),\quad \phi_{\tilde{x}_g}(3\pi/2+t)=\phi_{\tilde{x}_g}(3\pi/2-t),\quad t\in[0,\pi/2],$$

на основании которых получим

$$\mathrm{P}(L_n x_g,2\pi)=\int_0^{2\pi}\left|\dot{\phi}_{\tilde{x}_g}(\tau)\right|d\tau=2|\phi_{\tilde{x}_g}(3\pi/2)-\phi_{\tilde{x}_g}(\pi/2)|$$
$$\le 8\,\mathrm{arctg}\,\frac{\tilde{x}_g(0)}{\tilde{y}_g(0)}=8\,\mathrm{arctg}\,\frac{\overline{x}_g(0)}{n\overline{y}_g(0)}=8\,\mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}(\delta/2)/n)\equiv a_n.$$

Для любого достаточно малого $\gamma>0$ в силу условия $a_n\to 0$ при $n\to+\infty$ найдется такой номер $n_0\in\mathbb{N}$, что $\mathrm{P}(L_{n_0}x_g,2\pi)\le\gamma$, а значит, выполнится цепочка соотношений

$$\hat{\rho}_\bullet(x_g)=\inf_{L\in\mathrm{Aut}\mathbb{R}^2}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx_g,t)\le\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{P}(L_{n_0}x_g,t)$$
$$=\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{1}{2\pi p}\mathrm{P}(L_{n_0}x_g,2\pi p)=\varlimsup_{p\to+\infty}\frac{p}{2\pi p}\mathrm{P}(L_{n_0}x_g,2\pi)\le\frac{\gamma}{2\pi}.$$

Следовательно, учитывая произвольность $\gamma>0$ и соотношения

$$\check{\rho}_\circ(x)\le\check{\rho}_\bullet(x)\le\hat{\rho}_\bullet(x),\quad \check{\rho}_\circ(x)\le\hat{\rho}_\circ(x)\le\hat{\rho}_\bullet(x),\quad x\in\mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^2_*),\tag{2.3}$$

вытекающие из определений показателей блуждаемости, для значения $q=0$ выберем нелинейную систему

$$f(t,x)\equiv\begin{cases} f_\prime(t,x), & 0<|x|\le\alpha\vee|x|\ge\beta,\quad t\in\mathbb{R}_+,\\ \psi_-(|x|)\cdot f_\prime(t,x), & \alpha<|x|<\beta,\quad t\in\mathbb{R}_+.\end{cases}$$

3. Для нелинейной периодической системы вида (1.1) с правой частью

$$h(t,x)=\psi_+(|x|)\cdot f_\prime(t,x),\quad t\in\mathbb{R}_+,$$

будем иметь

$$\{\varphi(t,x_h(\cdot,x_0))\mid t\in\mathbb{R}_+\}\supset\left(-\psi_+(|x_0|)\frac{\pi}{2},\psi_+(|x_0|)\frac{\pi}{2}\right)\supset\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\quad \alpha<|x_0|<\beta.\tag{2.4}$$

В силу последнего включения каждое решение $x_h(t,x_0)$, $\alpha<|x_0|<\beta$, не покидает сектор, центральный угол которого больше чем π, причем зазор между этим сектором и целым полукругом равен $\delta=\psi_+(|x_0|)\pi-\pi$.

а) Для произвольного фиксированного решения $x_h=x_h(t,x_0)$ положим

$$L_n=S_nR,\quad n\in\mathbb{N},\quad \big(\overline{x}_h(t),\overline{y}_h(t)\big)^\top=Rx_h,\quad \big(\tilde{x}_h(t),\tilde{y}_h(t)\big)^\top=L_nx_h,$$

где

$$S_n=\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix},\quad R=\begin{pmatrix}\cos\psi&\sin\psi\\-\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix},\quad \psi=\phi_{x_h}(0)-\delta/2.$$

Сначала для выбранного решения x_h и достаточно малого $\gamma>0$ найдем такой номер n_0, при котором справедливы оценки

$$\mathrm{P}(L_{n_0}x_h,2\pi)\le 2\pi+\gamma.\tag{2.5}$$

Для этого вычислим

$$\phi_{\overline{x}_h}(0) = \phi_{x_h}(0) - \psi = \delta/2,$$

$$\phi_{\overline{x}_h}(\pi/2) = \phi_{x_h}(\pi/2) - \phi_{x_h}(0) + \delta/2 = \psi_+(|x_0|)\pi/2 + \delta/2 = \pi/2 + \delta,$$

$$\phi_{\overline{x}_h}(3\pi/2) = \phi_{x_h}(3\pi/2) - \phi_{x_h}(0) + \delta/2 = -\psi_+(|x_0|)\pi/2 + \delta/2 = -\pi/2,$$

$$\phi_{\tilde{x}_h}(0) \in (0, \pi/2), \quad \phi_{\tilde{x}_h}(\pi/2) \in (\pi/2, \pi), \quad \phi_{\tilde{x}_h}(3\pi/2) \in (-\pi/2, 0),$$

$$\begin{aligned}\phi_{\tilde{x}_h}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\tilde{x}_h(\pi/2)}{\tilde{y}_h(\pi/2)} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\overline{x}_h(\pi/2)}{n\overline{y}_h(\pi/2)}\\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{|Rx_h(t,x_0)|\cos\phi_{\overline{x}_h}(\pi/2)}{n|Rx_h(t,x_0)|\cos\phi_{\overline{x}_h}(\pi/2)} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\phi_{\overline{x}_h}(\pi/2))/n)\\ &\le \pi/2 - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\pi/2+\pi/4)/n) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(-1/n) = \pi/2 + \operatorname{arctg}(1/n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{\tilde{x}_h}\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\tilde{x}_h(3\pi/2)}{\tilde{y}_h(3\pi/2)}\\ &= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\overline{x}_h(3\pi/2)}{n\overline{y}_h(3\pi/2)} = -\pi/2 - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-\pi/2)/n) = -\pi/2,\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(L_n x_h, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \left|\dot{\phi}_{\tilde{x}_h}(\tau)\right| d\tau = 2(\phi_{\tilde{x}_h}(\pi/2) - \phi_{\tilde{x}_h}(3\pi/2)) = 2(\pi + \operatorname{arctg}(1/n)) \equiv b_n.$$

Очевидное свойство $b_n \to 2\pi$ при $n \to +\infty$ последовательности (b_n) завершает доказательство оценки (2.5).

б) Теперь покажем, что для решения x_h и любого оператора $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^2$ выполнена оценка $\mathrm{P}(Lx_h, 2\pi) \ge 2\pi$. Действительно, принимая во внимание непрерывность функции ϕ_{x_h} и учитывая условие (2.4), установим существованию такой точки $\tau_0 \in (\pi, 3\pi/2)$, что $\phi_{x_h}(\tau_0) = \pi + \phi_{x_h}(\pi/2)$. Поэтому при некотором $r > 0$ имеем равенство $x_h(\tau_0) = -rx_h(\pi/2)$, из которого для функции $z_h = Lx_h$ вытекает

$$z_h(\tau_0) = Lx_h(\tau_0) = L\big(-rx_h(\pi/2)\big) = -rL\big(x_h(\pi/2)\big) = -rz_h(\pi/2),$$

а значит, при некотором $m \in \mathbb{Z}$ верно и следующее равенство

$$\phi_{z_h}(\tau_0) = \phi_{z_h}(\pi/2) + \pi + 2m\pi.$$

Используя последнее равенство и условие

$$\phi_{z_h}(\pi/2+t) = \phi_{z_h}(\pi/2-t), \quad \phi_{z_h}(3\pi/2+t) = \phi_{z_h}(3\pi/2-t), \quad t \in [0, \pi/2],$$

выведем требуемое утверждение

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Lx_h, 2\pi) = \int_0^{\pi/2}\left|\dot{\phi}_{z_h}(\tau)\right| d\tau + \int_{\pi/2}^{\tau_0}\left|\dot{\phi}_{z_h}(\tau)\right| d\tau + \int_{\tau_0}^{2\pi}\left|\dot{\phi}_{z_h}(\tau)\right| d\tau\\ \ge 2\left|\int_{\pi/2}^{\tau_0}\dot{\phi}_{z_h}(\tau)\,d\tau\right| = 2|\pi + 2m\pi| \ge 2\pi.\end{aligned}$$

в) Для верхнего сильного показателя блуждаемости решения x_h с учетом оценки (2.5) будем иметь

$$\hat{\rho}_\bullet(x_h) = \inf_{L\in\mathrm{Aut}\mathbb{R}^2} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx_h,t) \leq \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\mathrm{P}(L_{n_0}x_h,t)$$
$$= \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{1}{2\pi p}\mathrm{P}(L_{n_0}x_h,2\pi p) = \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{p}{2\pi p}\mathrm{P}(L_{n_0}x_h,2\pi) \leq \frac{2\pi+\gamma}{2\pi}.$$

Для нижнего слабого показателя блуждаемости решения x_h на основании результата п. б) получим оценку снизу

$$\check{\rho}_\circ(x_h) = \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \inf_{L\in\mathrm{Aut}\mathbb{R}^2} \mathrm{P}(Lx_h,t) = \underline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{1}{2\pi p} \inf_{L\in\mathrm{Aut}\mathbb{R}^2} \mathrm{P}(Lx_h,2\pi p)$$
$$= \underline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{p}{2\pi p} \inf_{L\in\mathrm{Aut}\mathbb{R}^2} \mathrm{P}(Lx_h,2\pi) \geq \underline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{2\pi p}{2\pi p} = 1.$$

Далее, вспоминая свойства (2.3) показателей блуждаемости, придем к равенствам

$$\check{\rho}_\circ(x_h) = \check{\rho}_\bullet(x_h) = \hat{\rho}_\circ(x_h) = \hat{\rho}_\bullet(x_h) = 1.$$

Следовательно, для значения $q=1$ выберем систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0<|x|\leq\alpha \vee |x|\geq\beta, \quad t\in\mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|)\cdot f_\prime(t,x), & \alpha<|x|<\beta, \quad t\in\mathbb{R}_+. \end{cases}$$

4. Наконец, для произвольного значения $q = l_1/(l_1+l_2)$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ возьмем систему

$$f(t,x) \equiv \begin{cases} f_\prime(t,x), & 0<|x|\leq\alpha \vee |x|\geq\beta, \quad t\in\mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|)\cdot f_\prime(t,x), & \alpha<|x|<\beta, \quad t\in[0,2\pi l_1], \\ \psi_-(|x|)\cdot f_\prime(t,x), & \alpha<|x|<\beta, \quad t\in[2\pi l_1, 2\pi(l_1+l_2)], \end{cases}$$

где в кольце $\alpha < |x| < \beta$ функция $f(t,x)$ периодически (с периодом $T = 2\pi(l_1+l_2)$) продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+$.

Действительно, для любого решения $x_f = x_f(t,x_0)$, $\alpha<|x_0|<\beta$, найдется (см. пп. 2 и 3.а) такое преобразование $L_{n_0} \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{R}^2$, что показатели блуждаемости обладают свойством

$$\rho_\circ(x_f) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in\mathrm{Aut}\mathbb{R}^2} \mathrm{P}(Lx_f,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(L_{n_0}x_f,t) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{Tp}\mathrm{P}(L_{n_0}x_f,Tp)$$
$$= \lim_{p\to+\infty} \frac{p}{Tp}\mathrm{P}(L_{n_0}x_f,T) = \frac{1}{2\pi(l_1+l_2)} \sum_{i=1}^{l_1+l_2} \mathrm{P}(L_{n_0}x_f,2\pi i) = \frac{2\pi l_1}{2\pi(l_1+l_2)} = \frac{l_1}{l_1+l_2},$$

$$\rho_\circ(x_f) \leq \rho_\bullet(x_f) = \inf_{L\in\mathrm{Aut}\mathbb{R}^2} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{P}(Lx_f,t) = \frac{l_1}{l_1+l_2}.$$

Последние два соотношения полностью завершают доказательство леммы. □

Теперь перейдем к доказательству основного результата.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Занумеровав все рациональные числа из отрезка $[0,1]$ натуральными числами, определим последовательность $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$. По этой последовательности образуем следующую

$$s_1; s_1, s_2; s_1, s_2, s_3; \ldots; s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k; \ldots,$$

которую обозначим через $(q_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Единичный круг $|x| \le 1$ разобьем на счетное число колец вида

$$\alpha_{k+1} < |x| < \alpha_k, \quad \alpha_k = 2^{1-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Далее, выбираем линейную систему (2.2) и, на основании леммы 2.1, достраиваем ее в каждом кольце (2.6) так, чтобы при любом $k \in \mathbb{N}$ выполнялось $\rho(f, G_{\alpha_{k+1},\alpha_k}) = \{q_k\}$.

В кольце $1 \le |x| < +\infty$ и на каждой окружности $|x| = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$ линейную систему (2.2) оставляем без изменения, поэтому

$$\rho(f, G_{\alpha_k}) = \rho(f, G_{1,+\infty}) = \{1\}.$$

Таким образом, из условия $\alpha_k \to 0$ при $k \to +\infty$ для любого $\epsilon > 0$ следует справедливость (2.1). □

Автор выражает глубокую благодарность доценту А. Х. Сташу за постановку задачи и внимание к работе.

References

[1] И. Н. Сергеев, “Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 2006, № 25, 249–294; англ. пер.:I. N. Sergeev, “Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation”, *Journal of Mathematical Sciences*, **135**:1 (2006), 2764–2793.

[2] И. Н. Сергеев, “Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы”, *Известия РАН. Серия математическая*, **76**:1 (2012), 149–172; англ. пер.:I. N. Sergeev, “Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems”, *Izvestiya: Mathematics*, **76**:1 (2012), 139–162.

[3] И. Н. Сергеев, “Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Известия Института математики и информатики УдГУ*, 2015, № 2(46), 171–183. [I. N. Sergeev, “The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of UdSU*, 2015, № 2(46), 171–183 (In Russian)].

[4] И. Н. Сергеев, “Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Математические заметки*, **99**:5 (2016), 732–751; англ. пер.:I. N. Sergeev, “Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems”, *Mathematical Notes*, **99**:5 (2016), 729–746.

[5] И. Н. Сергеев, “Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 2016, № 31, 177–219; англ. пер.:I. N. Sergeev, “Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **234**:4 (2018), 497–522.

[6] И. Н. Сергеев, “Колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных систем”, *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*, **132** (2017), 117–121; англ. пер.:I. N. Sergeev, “Oscillation, rotation, and wandering of solutions to linear differential systems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **230**:5 (2018), 770–774.

[7] Д. С. Бурлаков, С. В. Цой, “Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 2014, № 30, 75–93; англ. пер.:D. S. Burlakov, S. V. Tsoii, “Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system”, *Journal of Mathematical Sciences*, **210**:2 (2015), 155–167.

[8] А. Х. Сташ, “Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 558–568. [A. Kh. Stash, “Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions”, *Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **29**:4 (2019), 558–568 (In Russian)].

[9] А. Х. Сташ, “Показатели ориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем”, *Владикав. матем. журнал*, **24**:3 (2022), 120–132. [A. Kh. Stash, “Oriented rotatability exponents of solution of autonomous differential systems”, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, **24**:3 (2022), 120–132 (In Russian)].

[10] А. Х. Сташ, “Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:1 (2015), 143–144; англ. пер.:A. Kh. Stash, “Existence of a two-dimensional linear system with continual spectra of total and vector frequencies”, *Differential Equation*, **51**:1 (2015), 146–148.

[11] А. Х. Сташ, “Спектры показателей колеблемости и вращаемости решений однородных дифференциальных систем”, *Владикав. матем. журнал*, **25**:2 (2023), 136–143. [A. Kh. Stash, “Spectra of oscillation and rotatability exponents of solutions of homogeneous differential systems”, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, **25**:2 (2023), 136–143 (In Russian)].

[12] А. Х. Сташ, “Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:5 (2023), 588–595; англ. пер.:A. Kh. Stash, “On the control of the spectra of upper strong oscillation exponents of signs, zeros, and roots of third-order differential equations”, *Differential Equation*, **59**:5 (2023), 597–605.

[13] А. Х. Сташ, “О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем”, *Вест. рос. ун-тов. Матем.*, **28**:141 (2023), 60–67. [A. Kh. Stash, “On the continuum spectra of the oscillation exponents of linear homogeneous differential systems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:141 (2023), 60–67 (In Russian)].

[14] А. Х. Сташ, “О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы”, *Труды института математики и механики УрО РАН*, **29**:2 (2023), 157–171; англ. пер.:A. Kh. Stash, “On essential values of oscillation exponents for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **321**:1 (2023), 216–229.

[15] И. Н. Сергеев, “О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2019, № 1, 21–26; англ. пер.:I. N. Sergeev, “Oscillation, rotatability, and wandering characteristic indicators for differential systems determining rotations of plane”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:1 (2019), 20–24.

[16] Д. С. Бурлаков, “Спектр скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2015, № 2, 49–53; англ. пер.:D. S. Burlakov, “Spectrum of wandering rates of a nonorthogonal product of two rotations”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **70**:2 (2015), 88–91.

[17] В. В. Миценко, “О блуждаемости решений двумерных дагональных и треугольных дифференциальных систем”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 2014, № 30, 221–241; англ. пер.:V. V. Mitsenko, “Wandering of solutions of two-dimensional diagonal and triangular systems of differential equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, **210**:3 (2015), 251–263.

[18] Е. М. Шишлянников, “Пример дифференциальной системы с континуальным спектром показателя блуждаемости”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2017, № 1, 64–68; англ. пер.:E. M. Shishlyannikov, “The example of a differential system with continual spectrum of wandering exponent”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **72**:1 (2017), 37–40.

[19] Е. М. Шишлянников, “Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2017, № 5, 14–21; англ. пер.:E. M. Shishlyannikov, “Two dimensional differential systems with arbitrary finite spectra of wandering exponent”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **72**:5 (2017), 192–198.

[20] А. Х. Сташ, “Свойства характеристик колеблемости Сергеева периодического уравнения второго порядка”, *Владикав. матем. журнал*, **23**:2 (2021), 78–86. [A. Kh. Stash, “Properties of sergeev oscilation characteristics of periodic second-order equation”, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, **23**:2 (2021), 78–86 (In Russian)].

[21] А. Х. Сташ, “О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем”, *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2023, № 1, 78–109. [A. Kh. Stash, “On the discontinuity of extreme exponents of oscillation on a set of linear homogeneous differential systems”, *Differential Equations and Control Processes*, 2023, № 1, 78–109 (In Russian)].

[22] И. Н. Сергеев, “Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2021, № 3, 41–46; англ. пер.:I. N. Sergeev, “The definition of the indices of oscillation, rotation, and wandering of nonlinear differential systems”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **76**:3 (2021), 129–134.

[23] И. Н. Сергеев, “Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:6 (2023), 726–734; англ. пер.:I. N. Sergeev, “Studying the oscillation, rotation, and wandering indicators by the first approximation”, *Differential Equation*, **59**:6 (2023), 741–750.

[24] А. Х. Сташ, “Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:8 (2023), 1139–1142; англ. пер.:A. Kh. Stash, “Comparing the spectra of oscillation exponents of a nonlinear system and the first approximation system”, *Differential Equation*, **59**:8 (2023), 1147–1150.

Информация об авторе

Лобода Надежда Алексеевна, старший преподаватель, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Адыгейский государственный университет, г. Майкоп, Российская Федерация. E-mail: n-loboda@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6249-6158

Поступила в редакцию 15.01.2024 г.
Поступила после рецензирования 25.04.2024 г.
Принята к публикации 07.06.2024 г.

Information about the author

Nadejda A. Loboda, Senior Lecturer, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Adyghe State University, Maykop, Russian Federation. E-mail: n-loboda@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6249-6158

Received 15.01.2024
Reviewed 25.04.2024
Accepted for press 07.06.2024